【解説】yukicoder No. 1321 塗るめた

FF256grhy

問題文

`https://yukicoder.me/problems/no/1321`

準備

A 元集合から B 元集合への全射の個数を $S(A,B)$ と書くことにする。包除原理から、この値は

$$S(A,B) = \sum_{i \in [0,B]} (-1)^i \ {}_B\mathrm{C}_i \ (B-i)^A$$

と表すことができる。特にこの式は $A < B$ である場合でも正しく 0 となる。

解法

先に色の使い方とボールの選び方を決め、それに対して条件を満たす色の塗り方を数える、という方針で計算する。

まず色の使い方が ${}_M\mathrm{C}_K$ 通りあり、ボールを L 個（$L \in [0,N]$）選ぶ選び方が ${}_N\mathrm{C}_L$ 通りある。そしてこれらに対し、選ばなかった $N-L$ 個のボールの色は自由なので M^{N-L} 通りの塗り方があり、選んだ L 個のボールには K 色すべてを使うので $S(L,K)$ 通りの塗り方がある。

従って、この問題の答え ans は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{ans} &= {}_M\mathrm{C}_K \sum_{L \in [0,N]} {}_N\mathrm{C}_L \ M^{N-L} \ S(L,K) \\
&= {}_M\mathrm{C}_K \sum_{L \in [0,N]} {}_N\mathrm{C}_L \ M^{N-L} \sum_{i \in [0,K]} (-1)^i \ {}_K\mathrm{C}_i \ (K-i)^L && \text{（前述の公式を適用）} \\
&= {}_M\mathrm{C}_K \sum_{i \in [0,K]} (-1)^i \ {}_K\mathrm{C}_i \sum_{L \in [0,N]} {}_N\mathrm{C}_L \ M^{N-L} \ (K-i)^L && \text{（和の順序を変更）} \\
&= {}_M\mathrm{C}_K \sum_{i \in [0,K]} (-1)^i \ {}_K\mathrm{C}_i \ (M+(K-i))^N && \text{（二項定理）}
\end{aligned}$$

累乗の計算はバイナリ法を用いることで高速にできるので、最後の式に基づいて ans を計算をすれば実行制限時間には十分に間に合う。

以上。